Άσκηση 9

(X,ρ) μ.χ. $x_1,\dots,x_n$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του X.

Ν.δ.ο υπάρχουν $U_1,\dots,U_n$ ανοιχτά ξένα ανά δύο με $x_i\in U_i$, $i=1,\dots,n$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι αν $x,y\in X$ και $0<\delta<\frac{\rho(x,y)}{2}$ τότε

$B_\rho(x,\delta)\cap B_\rho(y,\delta)=\emptyset$

Αν θέσουμε $\varepsilon=\min\left\{\frac{\rho(x_i,x_j)}{2},\ i,j=\{i\neq j, 1,\dots,n\}\right\}$

x_1 x_2 x_n

και $0<\delta<\varepsilon$ τότε για $V_i=B_\rho(x_i,\delta)$, $i=1,\dots,n$.

Τότε V_i ανοιχτά, $x_i\in V_i$ $=1,\dots,n$ και $V_i\cap V_j=\emptyset$ για $i\neq j$

22/3/18

Ορισμός

Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει $D \subseteq X$ (το πολύ) αριθμήσιμος και $\overline{D} = X$.

Παράδειγμα

i) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος διότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμος και πυκνό υποσύνολο του.

ii) Ο $\mathbb{R}^k$ με την ευκλείδεια μετρική είναι διαχωρίσιμος διότι το $\mathbb{Q}^k$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό.

iii) Αν (X,ρ) τυχόν σύνολο με τη διακριτή μετρική, τότε ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν το X είναι (το πολύ) αριθμήσιμο.

Πράγματι ένα $A \subseteq X$ είναι πυκνό αν και μόνο αν $A = X$ διότι $\overline{A} = A$. Έτσι το μόνο πυκνό υποσύνολο του X είναι το ίδιο το X. Επομένως X διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow$ (το πολύ) αριθμήσιμο.

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται βάση για τα ανοικτά σύνολα του X ή βάση για την τοπολογία του X αν κάθε $G \subseteq X$ ανοικτό μπορεί να γραφτεί ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$ (δηλ για κάθε $G \subseteq X$ ανοικτό $\exists (B_{ij})_{i,j\in I}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{B}$ ώστε $G = \bigcup_{i\in I} B_i$).

Παράδειγμα

Αν (X,ρ) μετρικός χώρος τότε η οικογένεια $\{B_\rho(x,\varepsilon)\ x\in X, \varepsilon>0\}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του X.

Πράγματι, αν $G\subseteq X$ ανοικτό, τότε για κάθε $x\in G$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x)\subseteq G$. Τότε $G=\bigcup_{x\in G} B_\rho(x,\varepsilon_x)$.

Πρόταση

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Τ.Α.Ε.Ι.

i) Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X.

ii) Για κάθε $G\subseteq X$ ανοικτό και κάθε $x\in G$, υπάρχει $B\in\mathcal{B}$ ώστε $x\in B\subseteq G$.

Απόδειξη

$(i)\Rightarrow(ii)$: Έστω $G\subseteq X$ ανοικτό και $x\in G$. Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X υπάρχει $(B_i)_{i\in I}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{B}$ ώστε $G=\bigcup_{i\in I} B_i$. Άρα $\exists\, i_0\in I$ $x\in B_{i_0}\subseteq G$.

$(ii)\Rightarrow(i)$: Έστω $G\subseteq X$ ανοικτό. Τότε για κάθε $x\in G$ υπάρχει $B_x\in\mathcal{B}$ ώστε $x\in B_x\subseteq G$. Τότε $G=\bigcup_{x\in G} B_x$. Άρα η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X.

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τ.Α.Ε.Ι.

i) Ο X είναι διαχωρίσιμος

ii) Υπάρχει $\mathcal{B}$ αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X.

Απόδειξη

(i) ⇒ (ii) : Υποθέτουμε ότι $\mathcal{B}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X.

Για κάθε μη κενό $B \in \mathcal{B}$ επιλέγουμε $x_B \in B$.

Θέτουμε $D = \{ x_B \ \ B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset \}$

Το D είναι προφανώς αριθμήσιμο.

Το D είναι πυκνό: Απόδειξη

Αρκεί νδο το D τέμνει κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο. Έστω G ανοικτό και μη κενό. Τότε υπάρχει $x \in G$. Τότε από υπόθεση $\exists\, B \in \mathcal{B}$ $x \in B \subseteq G$. Τότε $x_B \in B \subseteq G$ και $x_B \in D$.

Άρα $x_B \in D \cap G$, άρα $D \cap G \neq \emptyset$.

(ii) ⇒ (i) : Εφόσον ο X είναι διαχωρίσιμος υπάρχει $D \subseteq X$ (το πολύ) αριθμήσιμο και πυκνό.

Θέτουμε $\mathcal{B} = \{ B_\rho(y,q) \ , y \in D$ και $q \in \mathbb{Q}^+ \}$.

γιατί θέλω $\mathcal{B}$ να είναι αριθμήσιμη.

Η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη (αφού $D \times \mathbb{Q}^+$ αριθμήσιμη).

Η $\mathcal{B}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα (κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο).

Ερώτημα: Το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Να δοθεί μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Απάντηση: Αν θέσουμε $\mathcal{B} = \{(a_n, b_n), \ a_n, b_n \in \mathbb{Q} \ a_n < b_n\}$ η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη, αποτελείται από ανοικτά σύνολα.

Αν $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό και $x \in G$, τότε $\exists \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$.

$$x - \varepsilon < \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\uparrow}{a_n}} < x < \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\uparrow}{b_n}} < +\varepsilon$$

Έχουμε $x \in (a_n, b_n) \subseteq G$

Πόρισμα: Αν (X, ρ) είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $A \subseteq$
Τότε ο (A, ρ_A) είναι επίσης διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο θεώρημα, εφόσον (X, ρ) είναι διαχωρίσιμ
υπάρχει $\mathcal{B}$ μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Θέτουμε $\mathcal{B} = \{A \cap B, \ B \in \mathcal{B}\}$

Τότε η $\mathcal{B}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα του (A, ρ_A)

Η $\mathcal{B}'$ είναι αριθμήσιμη (αφού η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη) και η $\mathcal{B}'$ είναι βάση για την τοπολογία του (A, ρ_A).

Πράγματι, για κάθε U ανοικτό στο A και $x \in U$.
Τότε $U = A \cap G$ για κάποιο G ανοικτό στο X
Τότε $x \in G$ και $\exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq G \Rightarrow x \in A \cap B \subseteq A \cap G = U$

<u>Παράδειγμα</u>: Ξέρουμε $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος άρα κάθε υπόχωρος του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι επίσης διαχωρίσιμος.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ των αρρήτων, ο $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ με τη σχετική μετρική είναι διαχωρίσιμος

→ Ένα παράδειγμα αριθμήσιμου και πυκνού υποσυνόλου του $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι το $\{\sqrt{2}+q \ , q\in\mathbb{Q}\}$

→ Ένα παράδειγμα μιας αριθμήσιμης βάσης για την τοπολογία του $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι η $\{(a,b)\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q} \ , a<b \ , a,b\in\mathbb{Q}\}$

Χαρακτηρισμός συνέχειας συναρτήσεων μέσω ανοικτών και κλειστών συνόλων

<u>Υπενθύμιση</u>: Αν $f:(X,\rho)\to(Y,d)$, $x_0\in X$

i) Η f λέγεται συνεχής στο x_0 αν $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0$ $f(S_\rho(x_0,\delta))\subseteq S_d(f(x_0),\varepsilon)$

$[\rho(x,x_0)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon]$

ii) Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in X$.

Εικόνες και αντίστροφες εικόνες συνόλων

Αν $f:X\to Y$

για $A\subseteq X$ $\quad f(A)=\{f(x) \ , x\in A\}$

για $B\subseteq Y$ $\quad f^{-1}(B)=\{ \cancel{x\in A} \ , f(x)\in B\}$

<u>Ιδιότητες</u>: $f^{-1}(B\cup\Gamma)=f^{-1}(B)+f^{-1}(\Gamma)$

$f^{-1}(B\cap\Gamma)=f^{-1}(B)+f^{-1}(\Gamma)$

$f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$

Για $A, B \subseteq X$ ισχύει $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ αλλά δεν ισχύει εν γένει ότι $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Επίσης, $\forall A \subseteq X$ $\quad A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\forall B \subseteq Y$ $\quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Θεώρημα: Έστω (X, ρ), (Y, d) δύο μετρικοί χώροι και $f: (X, \rho) \to (Y, d)$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) Η f είναι συνεχής
2) Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X
3) Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X.
4) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Απόδειξη: 1) $\Rightarrow$ 2) Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό. Έστω $x_0 \in f^{-1}(G)$. Τότε $f(x_0) \in G$.

Εφόσον, το G είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ $B_d(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G$.

Εφόσον, η f είναι συνεχής (στο x_0) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_d(f(x_0), \varepsilon)$

Από τα παραπάνω προκύπτει $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq G$

Συνεπώς, $B_\rho(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Επομένως, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.

2) $\Rightarrow$ 1) Έστω $x_0 \in X$. Θ.δ. η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$ εφόσον το $B_d(f(x_0), \varepsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y από υπόθεση, το $f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$ είναι ανοικτό στο X.

Εφόσον $x_0 \in f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $B_\rho(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$

και άρα $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_d(f(x_0), \varepsilon)$. Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο x_0.

Επομένως, η f είναι συνεχής

2) => 3) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Τότε το $Y \setminus F$ είναι ανοικτό στον Y άρα από υπόθεση το $f^{-1}(Y \setminus F)$ είναι ανοικτό στο X, δηλ $X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό στο X, άρα το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X.

3) => 2) Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό. Τότε το $Y \setminus G$ είναι κλειστό στο Y, άρα από υπόθεση $f^{-1}(Y \setminus G)$ είναι κλειστό στο X, δηλ. $X \setminus f^{-1}(G)$ είναι κλειστό στο X, άρα το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X.

3) ⇒ 4) Έστω $A \subseteq X$. Εφόσον, το $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό στον Y από υπόθεση το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του X. Επίσης, $f(A) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ και ακόμα $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ συνεπώς $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ και εφόσον το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ προκύπτει ότι $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Επομένως, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

4) => 3) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό, (άρα $\overline{F} = F$)
Εφαρμόζοντας την υπόθεση για $A = f^{-1}(F)$ προκύπτει ότι

$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))}$ (α)

Εφόσον, $f(f^{-1}(F)) \subseteq F$ έπεται ότι $\overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F}$

Συνεπώς, $\overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq F$ (β)

α), β) ⇒ $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq F$, άρα $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$ συνεπώς, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

Παραδείγματα - Εφαρμογές

α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής (όπου στον $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική). Το σύνολο $\{x \in X \ f(x) > 0\} = f^{-1}((0,+\infty))$ είναι αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης, άρα ανοικτό.

f συνεχής και $\{0\}$ κλειστό

Το $\{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$, άρα είναι κλειστό.

$\{x \in X : f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0,+\infty))$ κλειστό

$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα ανοικτού μέσω συνεχούς συνάρτησης

$\{x \in X : 3 < f(x) < 5\} = f^{-1}((3,5))$ ανοικτό

$\{x \in X : 3 < f(x) \leq 5\} = f^{-1}([3,5])$ κλειστό